3. С северного полюса Земли, под некоторым углом α к горизонту, запущен снаряд, который попадает в ее южный полюс. Используя постоянную всемирного тяготения G, а также массу M и радиус R Земли, получите формулы для определения:

а) начальной скорости снаряда;

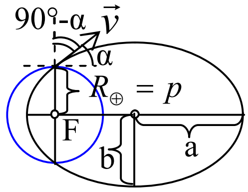
б) его максимальной высоты над поверхностью Земли;

в) скорости снаряда в момент пересечения им плоскости земного экватора.

г) расстояния от точки старта до точки падения снаряда, отсчитанного по поверхности Земли.

Решение:

а) Поскольку большая полуось эллипса, по которому движется снаряд, перпендикулярна полярному диаметру Земли, параметр (фокальный) эллипса равен радиусу Земли:



$$p = \frac{b^2}{a} = R \to b = \sqrt{Ra}$$

Из второго закона Кеплера (а, точнее, из закона сохранения момента импульса):

$mvR\sin(90^\circ - \alpha) = mv_aQ \to vR\cos(\alpha) = v_aQ$ (здесь v_a – скорость в апогее).

Используем связь Q с большой полуосью орбиты: $Q = a(1+e)$.

Из интеграла энергий:

$$v_a{}^2 = GM\left(\frac{2}{Q} - \frac{1}{a}\right) = GM\left(\frac{2}{a(1+e)} - \frac{1}{a}\right) = \frac{GM}{a}\left(\frac{2}{1+e} - 1\right) = \frac{GM}{a}\left(\frac{2-1-e}{1+e}\right) = \frac{GM}{a}\left(\frac{1-e}{1+e}\right).$$

Тогда:

$$v_a = \sqrt{\frac{GM}{a}\left(\frac{1-e}{1+e}\right)} \to v_aQ = \sqrt{\frac{GM}{a}\left(\frac{1-e}{1+e}\right)} \cdot a(1+e) = \sqrt{\frac{GM}{a}\left(\frac{1-e}{1+e}\right)(1+e)^2} \cdot a = \sqrt{\frac{GM}{a}(1-e)(1+e)} \cdot a;$$

$v_aQ = \sqrt{\dfrac{GM}{a}} \cdot a \cdot \sqrt{1-e^2} = \sqrt{\dfrac{GM}{a}} \cdot b$ (здесь использовано свойство эллипса: $b = a \cdot \sqrt{1-e^2}$).

Теперь используем параметр эллипса: $vR\cos(\alpha) = \sqrt{\dfrac{GM}{a}} \cdot b = \sqrt{\dfrac{GM}{a}} \cdot \sqrt{Ra} = \sqrt{GMR}$.

Отсюда: $v = \dfrac{1}{\cos\alpha}\sqrt{\dfrac{GM}{R}}$.

Следует отметить, что при $\alpha = 45^\circ$ скорость становится второй космической: $v = \sqrt{2}\sqrt{\dfrac{GM}{R}}$.

б) Максимальная высота полета снаряда над поверхностью Земли равна:

$h_{MAX} = Q - R = a(1+e) - R$

Большую полуось найдём, используя интеграл энергий и полученное выражение для v:

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)} \cdot \frac{GM}{R} \to \frac{2}{R} - \frac{1}{a} = \frac{1}{R\cos^2(\alpha)} \to \frac{1}{a} = \frac{2}{R} - \frac{1}{R\cos^2(\alpha)} = \frac{2\cos^2(\alpha) - 1}{R\cos^2(\alpha)}.$$

Отсюда: $a = \dfrac{R\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha - 1} = \dfrac{R\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha - (\sin^2(\alpha) + \cos^2\alpha)} = \dfrac{R\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2(\alpha)} = \dfrac{R}{1 - tg^2(\alpha)}$.

Теперь определим эксцентриситет:

$$\begin{cases} b = \sqrt{Ra} \\ b = a\sqrt{1-e^2} \end{cases} \to Ra = a^2(1-e^2) \to e^2 = 1 - \frac{R}{a} = 1 - \frac{R \cdot (1 - tg^2(\alpha))}{R} = tg^2(\alpha); \to e = tg(\alpha)$$

Подставим найденные выражения в формулу для h_{MAX}:

$$h_{MAX} = \frac{R}{1 - tg^2(\alpha)}(1 + tg(\alpha)) - R = R \cdot \left(\frac{1 + tg(\alpha)}{(1 - tg(\alpha))(1 + tg(\alpha))} - 1\right) = R \cdot \left(\frac{1}{1 - tg(\alpha)} - 1\right) = R \cdot \frac{1 - 1 + tg(\alpha)}{1 - tg(\alpha)}.$$

В итоге получается: $h_{MAX} = R\dfrac{tg(\alpha)}{1 - tg(\alpha)}$.

в) Снова используем второй закон Кеплера: $vR\cos(\alpha) = v_aQ \to v_a = \dfrac{vR\cos(\alpha)}{Q} = \dfrac{\sqrt{GMR}}{Q}$.

Найдём апогейное расстояние: $Q = h_{MAX} + R = R\dfrac{tg(\alpha)}{1-tg(\alpha)} + R = R\dfrac{tg(\alpha)+1-tg(\alpha)}{1-tg(\alpha)} = \dfrac{R}{1-tg(\alpha)}$.

Теперь легко найти скорость тела в апогее: $v_a = \dfrac{\sqrt{GMR}}{R}(1-tg(\alpha) = \sqrt{\dfrac{GM}{R}}\cdot(1-tg(\alpha)$.

г) Это расстояние – половина длины окружности: $L = \pi R$.

Ответы: а) $v = \dfrac{1}{\cos(\alpha)}\sqrt{\dfrac{GM}{R}}, \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, б) $h_{MAX} = R\dfrac{tg(\alpha)}{1-tg(\alpha)}$,

в) $v_a = \sqrt{\dfrac{GM}{R}}\left(1-tg(\alpha)\right)$, г) $L = \pi R$.